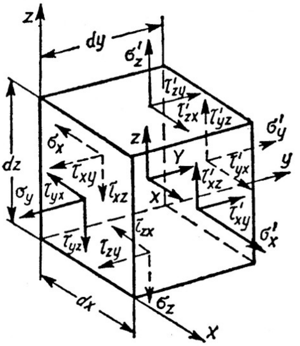
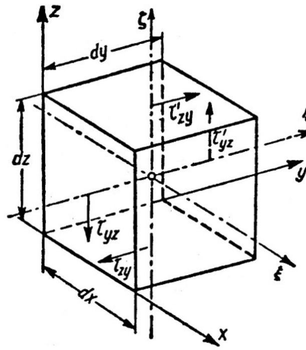
INSTYTUT MECHANIKI
I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN
WYDZIAŁU MECHANICZNEGO

TEORIA STANU NAPREZENIA I ODKSZTALCENIA

I. Równania równowagi wewnętrznej (Naviera)





$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx, \quad \tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dx, \quad \tau'_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}dx;$$

$$\tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy, \quad \sigma'_y = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}dy, \quad \tau'_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}dy;$$

$$\tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz, \quad \tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}dz, \quad \sigma'_z = \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}dz.$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0,$$

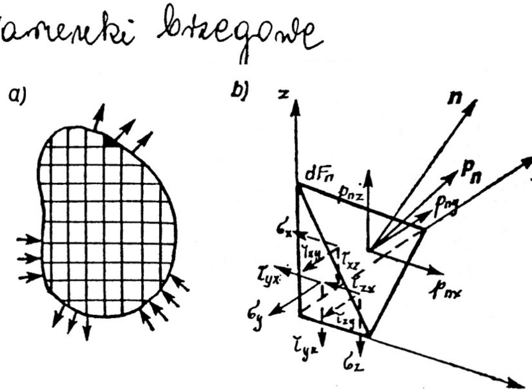
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0,$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \qquad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0.$$

II. Warunki brzegowe

a)

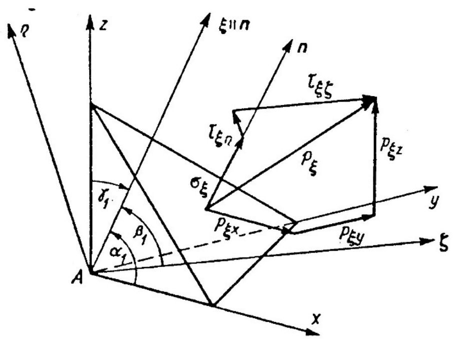
b)



$$a = \cos(n\hat{\ }x), \quad dF_x = a\,dF_n$$
$$b = \cos(n\hat{\ }y), \quad dF_y = b\,dF_n$$
$$c = \cos(n\hat{\ }z), \quad dF_z = c\,dF_n$$

$$p_{nx} = \sigma_x a + \tau_{xy} b + \tau_{xz} c$$
$$p_{ny} = \tau_{yx} a + \sigma_y b + \tau_{yz} c$$
$$p_{nz} = \tau_{zx} a + \tau_{zy} b + \sigma_z c$$

III Transformacja naprężeń



$$\bar{p}_\xi = \bar{\sigma}_\xi + \bar{\tau}_{\xi\eta} + \bar{\tau}_{\xi\zeta}$$
$$\bar{p}_\xi = \bar{p}_{\xi x} + \bar{p}_{\xi y} + \bar{p}_{\xi z}$$

$$\sigma_\xi = p_{\xi x} a_1 + p_{\xi y} b_1 + p_{\xi z} c_1$$

gdzie $a_1 = \cos(\xi x)$, $b_1 = \cos(\xi y)$, $c_1 = \cos(\xi z)$

$$\sigma_\xi = \sigma_x a_1^2 + \sigma_y b_1^2 + \sigma_z c_1^2 + 2\tau_{xy} a_1 b_1 + 2\tau_{yz} b_1 c_1 + 2\tau_{zx} c_1 a_1$$

$$\tau_{\xi\eta} = \sigma_x a_1 a_2 + \sigma_y b_1 b_2 + \sigma_z c_1 c_2 + \tau_{xy}(a_1 b_2 + a_2 b_1) + \tau_{yz}(b_1 c_2 + b_2 c_1) + \tau_{zx}(c_1 a_2 + c_2 a_1)$$

gdzie: $a_2 = \cos(\eta x)$, $b_2 = \cos(\eta y)$, $c_2 = \cos(\eta z)$

IV. Tensor naprężenia.

$\sigma_x = t_{11}$ $\quad \tau_{xy} = t_{12}$ $\quad \tau_{xz} = t_{13}$

$\tau_{yx} = t_{21}$ $\quad \sigma_y = t_{22}$ $\quad \tau_{yz} = t_{23}$

$\tau_{zx} = t_{31}$ $\quad \tau_{zy} = t_{32}$ $\quad \sigma_z = t_{33}$

$\sigma_\xi = t'_{11}$ $\quad \tau_{\xi\eta} = t'_{12}$ $\quad \tau_{\xi\zeta} = t'_{13}$

$\tau_{\xi\eta} = t'_{21}$ $\quad \sigma_\eta = t'_{22}$ $\quad \tau_{\eta\zeta} = t'_{23}$

$\tau_{\zeta\xi} = t'_{31}$ $\quad \tau_{\zeta\eta} = t'_{32}$ $\quad \sigma_\zeta = t'_{33}$

$x = x_1$ $\quad \xi = x'_1$

$y = x_2$ $\quad \eta = x'_2$

$z = x_3$ $\quad \zeta = x'_3$

	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Stosując powyższe oznaczenia możemy wszystkie dziewięć wzorów transformacyjnych zastąpić jednym o ogólnej postaci:

$$t'_{kl} = a_{ki}\, a_{lj}\, t_{ij} \qquad (i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

wskaźniki kl odnoszą się do nowego układu, natomiast ij do układu pierwotnego.

$$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow (t'_{kl}) = \begin{pmatrix} t'_{11} & t'_{12} & t'_{13} \\ t'_{21} & t'_{22} & t'_{23} \\ t'_{31} & t'_{32} & t'_{33} \end{pmatrix}$$

Macierze transformujące się wg powyższego wzoru są tensorami II rzędu.
Jeżeli $t_{ij} = t_{ji}$ oraz $t'_{kl} = t'_{lk}$
to są to tensory symetryczne
Składowe stanu naprężenia tworzą tensor symetryczny II rzędu.

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

V Naprężenia główne

Poszukując wartości a, b, c dla ekstremalnego naprężenia σ_ξ z warunkiem pobocznym $a^2+b^2+c^2=1$ ustawiamy następujące równania

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial c} = 0$$

gdzie $F(a,b,c) = \sigma_\xi + \lambda g$

λ – mnożnik Lagrangea

$g = a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0$

$$\sigma_\xi^3 - \Pi_1 \sigma_\xi^2 + \Pi_2 \sigma_\xi - \Pi_3 = 0$$

gdzie: $\Pi_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$$\Pi_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix} =$$

$$= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$\Pi_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 - \sigma_x\tau_{yz}^2 .$$

Π_1, Π_2, Π_3 – niezmienniki stanu naprężenia.

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$$

VI. Koła naprężeń Mohra

Dane: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; poszukujemy składowych σ, τ naprężenia w dowolnym punkcie przekroju.

Należy określić następujące trzy funkcje kosinusów kierunkowych

$$a = a(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma, \tau)$$
$$b = b(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma, \tau)$$
$$c = c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma, \tau)$$

$p_{nx} = \sigma_1 a$ ze wzoru transformacyjnego

$p_{ny} = \sigma_2 b$

$p_{nz} = \sigma_3 c$

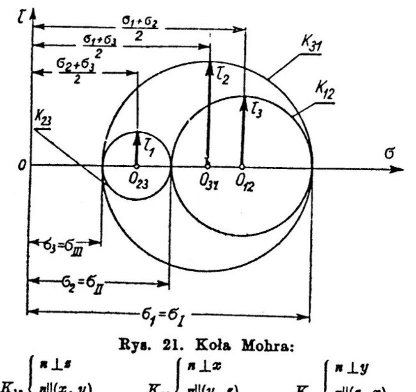
$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 a^2 + \sigma_2 b^2 + \sigma_3 c^2 \\ \sigma^2 + \tau^2 = p_n^2 \rightarrow \sigma^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 a^2 + \sigma_2^2 b^2 + \sigma_3^2 c^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

Równania te są równaniami okręgów we współrzędnych σ i τ, są to:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$



Rys. 21. Koła Mohra:

$K_{12}\begin{cases} n \perp z \\ n \parallel (x, y) \\ dF \perp (x, y) \end{cases}$ $K_{23}\begin{cases} n \perp x \\ n \parallel (y, z) \\ dF \perp (y, z) \end{cases}$ $K_{31}\begin{cases} n \perp y \\ n \parallel (z, x) \\ dF \perp (z, x) \end{cases}$