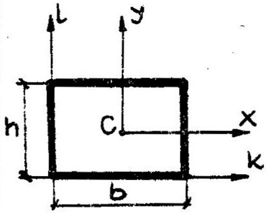
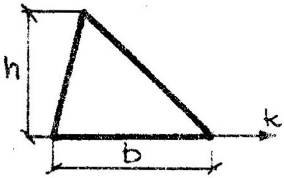
INSTYTUT MECHANIKI
I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN
WYDZIAŁU MECHANICZNEGO

MOMENTY GEOMETRYCZNE FIGUR PŁASKICH (PRZYKŁADY)

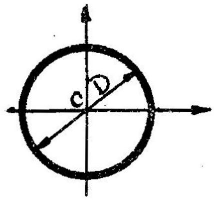
ZESTAWIENIE PODSTAWOWYCH WZORÓW



$$J_k = \frac{bh^3}{3} \quad J_l = \frac{hb^3}{3} \quad J_x = \frac{bh^3}{12} \quad J_y = \frac{hb^3}{12}$$

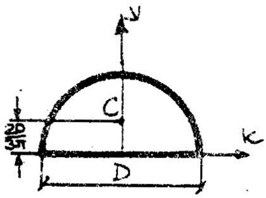


$$J_k = \frac{bh^3}{12}$$



$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$J_c = J_x + J_y = \frac{\pi D^4}{32}$$

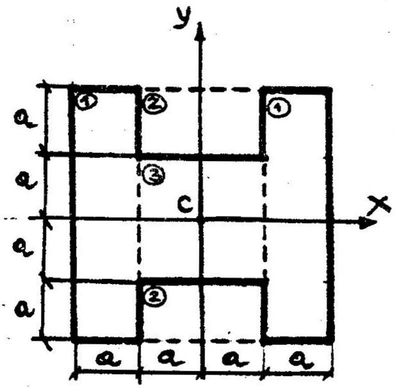


$$J_k = \frac{\pi D^4}{128}$$

$$J_y = \frac{\pi D^4}{128}$$

PRZYKŁAD 1

WYZNACZYĆ GŁÓWNE CENTRALNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI DLA FIGURY O DWÓCH OSIACH SYMETRII



OSIE SYMETRII SĄ GŁÓWNYMI CENTRALNYMI OSIAMI BEZWŁADNOŚCI

$$J_x = 2J_x^{①} + J_x^{③}$$

$$J_x^{①} = \frac{a(4a)^3}{12} \qquad J_x^{③} = \frac{2a(2a)^3}{12}$$

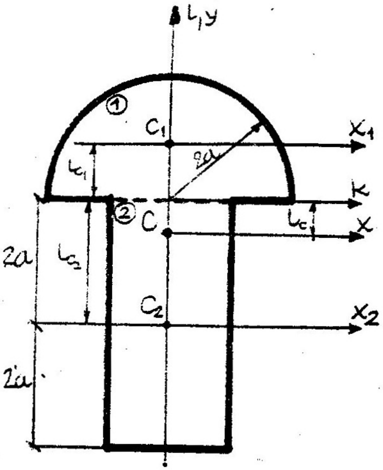
$$\underline{J_x = 12a^4}$$

$$J_y = J_y^{①+②+③} - 2J_y^{②}$$

$$J_y^{①+②+③} = \frac{4a(4a)^3}{12} \qquad J_y^{②} = \frac{a(2a)^3}{12}$$

$$\underline{J_y = 20a^4}$$

PRZYKŁAD 2



WYZNACZYĆ GŁÓWNE CENTRALNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI DLA FIGURY O JEDNEJ OSI SYMETRII

C_1 – ŚRODEK CIĘŻKOŚCI FIGURY ①

$k_{c_1} = 0 \qquad l_{c_1} = \frac{8a}{3\pi}$

C_2 – ŚRODEK CIĘŻKOŚCI FIGURY ②

$k_{c_2} = 0 \qquad l_{c_2} = -2a$

WSPÓŁRZĘDNE ŚRODKA CIĘŻKOŚCI C

$k_c = 0 \qquad l_c = \frac{S_k^{(1)} + S_k^{(2)}}{F^{(1)} + F^{(2)}}$

$S_k^{(1)}$ – MOMENT STATYCZNY POLA FIGURY ① WZGLĘDEM OSI k

$F^{(1)}$ – POLE FIGURY ①

$S_k^{(2)}$ – MOMENT STATYCZNY POLA FIGURY ② WZGLĘDEM OSI k

$F^{(2)}$ – POLE FIGURY ②

$S_k^{(1)} = F^{(1)} \cdot l_{c_1} \qquad\qquad S_k^{(2)} = F^{(2)} \cdot l_{c_2}$

$$l_c = \frac{\frac{1}{2}\pi(2a)^2 \frac{8a}{3\pi} + 2a \cdot 4a \cdot (-2a)}{\frac{1}{2}\pi(2a)^2 + 2a \cdot 4a} = -\frac{16}{3(\pi+4)}a \approx 0{,}75a$$

OŚ y POKRYWAJĄCA SIĘ Z OSIĄ SYMETRII l JEST GŁÓWNĄ CENTRALNĄ OSIĄ BEZWŁADNOŚCI. DRUGĄ OSIĄ JEST x – PROSTOPADŁA DO y, PRZECHODZĄCA PRZEZ C.

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)}$$

$$J_y^{(1)} = \pi\frac{(4a)^4}{128} \qquad J_y^{(2)} = \frac{4a(2a)^3}{12}$$

$$\underline{J_y = \frac{6\pi + 8}{3}a^4 \approx 8{,}95a^4}$$

J_x

I SPOSÓB

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)}$$

$$J_x^{(1)} = J_{x_1}^{(1)} + F^{(1)}(|l_{c_1}| + |l_c|)^2$$

$$J_{x_1}^{(1)} = J_k^{(1)} - F^{(1)} l_{c_1}^2 \qquad\qquad J_k^{(1)} = \pi\frac{(4a)^4}{128}$$

$$J_x^{(1)} \approx 17{,}83a^4$$

$$J_x^{②} = J_{x_2}^{②} + F^{②}\left(|l_{c_2}| - |l_c|\right)^2$$

$$J_{x_2}^{②} = \frac{2a\,(4a)^3}{12}$$

$$J_x^{②} \approx 23{,}17a^4$$

$$\underline{J_x = J_x^{①} + J_x^{②} \approx 41\,a^4}$$

II SPOSÓB

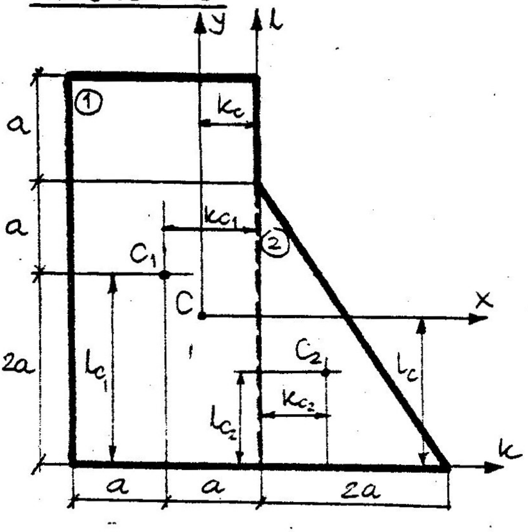
$$J_x = J_k - \left(F^{①} + F^{②}\right) l_c^2$$

$$J_k = J_k^{①} + J_k^{②}$$

$$J_k^{①} = \pi \frac{(4a)^4}{128} \qquad J_k^{②} = \frac{2a\,(4a)^3}{3}$$

$$\underline{J_x \approx 41\,a^4}$$

PRZYKŁAD 3



WYZNACZYĆ GŁÓWNE CENTRALNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI DLA FIGURY NIE POSIADAJĄCEJ OSI SYMETRII

C_1 – ŚRODEK CIĘŻKOŚCI FIGURY ①

$$k_{c_1} = -a \qquad l_{c_1} = 2a$$

C_2 – ŚRODEK CIĘŻKOŚCI FIGURY ②

$$k_{c_2} = a \qquad l_{c_2} = \frac{2}{3}a$$

WSPÓŁRZĘDNE ŚRODKA CIĘŻKOŚCI C

$$k_c = \frac{S_l^{①} + S_l^{②}}{F^{①} + F^{②}} = \frac{F^{①} k_{c_1} + F^{②} k_{c_2}}{F^{①} + F^{②}}$$

$$l_c = \frac{S_k^{①} + S_k^{②}}{F^{①} + F^{②}} = \frac{F^{①} l_{c_1} + F^{②} l_{c_2}}{F^{①} + F^{②}}$$

$$k_c = \frac{2a \cdot 4a \cdot (-a) + \frac{1}{2} 2a \cdot 3a \cdot \frac{2}{3}a}{2a \cdot 4a + \frac{1}{2} 2a \cdot 3a} = -\frac{6}{11}a \approx 0{,}54a$$

$$l_c = \frac{2a \cdot 4a \cdot 2a + \frac{1}{2} 2a \cdot 3a \cdot a}{2a \cdot 4a + \frac{1}{2} 2a \cdot 3a} = \frac{9}{11}a \approx 1{,}73a$$

MOMENTY BEZWŁADNOŚCI WZGLĘDEM OSI PRZECHODZĄCYCH PRZEZ ŚRODEK CIĘŻKOŚCI C.

$$J_x = J_k - (F^{①} + F^{②}) l_c^2$$

$$J_k = J_k^{①} + J_k^{②}$$

$$J_k^{①} = \frac{2a(4a)^3}{3} \qquad J_k^{②} = \frac{2a(3a)^3}{12}$$

$$\underline{J_x = \frac{947}{66} a^4 \approx 14{,}25 a^4}$$

$$J_y = J_l - (F^{①} + F^{②}) k_c^2$$

$$J_l = J_l^{①} + J_l^{②}$$

$$J_l^{①} = \frac{4a(2a)^3}{3} \qquad J_l^{②} = \frac{3a(2a)^3}{12}$$

$$\underline{J_y = \frac{310}{33} a^4 \approx 12{,}67 a^4}$$

$$D_{xy} = D_{kl} - (F^{①} + F^{②}) k_c l_c$$

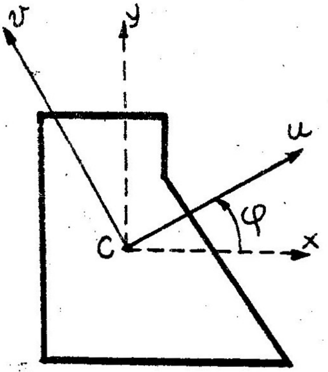
$$D_{kl} = D_{kl}^{①} + D_{kl}^{②}$$

$$D_{kl}^{①} = F^{①} k_{c_1} l_{c_1} \qquad D_{kl}^{②} = F^{②} k_{c_2} l_{c_2}$$

$$\underline{D_{xy} = -\frac{40}{11} a^4 \approx -3{,}64 a^4}$$

WYZNACZENIE POŁOŻENIA GŁÓWNYCH CENTRALNYCH OSI BEZWŁADNOŚCI

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2D_{xy}}{J_y - J_x} \longrightarrow \underline{\varphi \approx 28^\circ}$$



GŁÓWNE CENTRALNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI

$$\underline{J_u} = J_x \cos^2\varphi + J_y \sin^2\varphi - D_{xy} \sin 2\varphi \approx \underline{16{,}28 a^4}$$

$$\underline{J_v} = J_x \sin^2\varphi + J_y \cos^2\varphi + D_{xy} \sin 2\varphi \approx \underline{7{,}46 a^4}$$