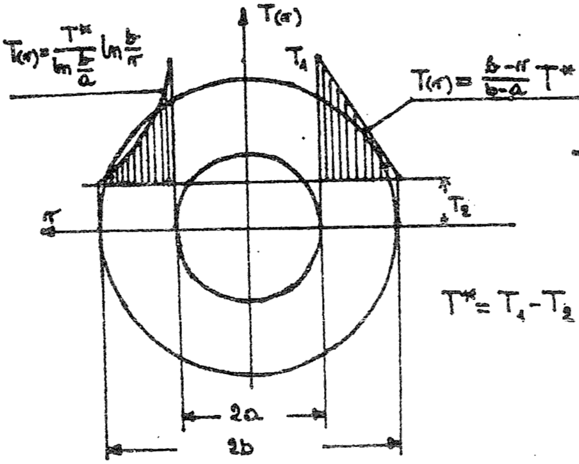
INSTYTUT MECHANIKI
I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN
WYDZIAŁU MECHANICZNEGO

Wpływ gradientu temperatury na stan naprężenia w cylindrach grubościennych i tarczach wirujących.



$T_1 > T_2$

$T^* = T_1 - T_2$

Jeżeli pole temperatury jest symetryczne względem osi cylindra i stałe wzdłuż jego długości, wówczas można przyjąć, że przekroje poprzeczne - leżące dostatecznie daleko od końców pozostają płaskie i $\varepsilon_z = const.$

Dla rozwiązania problemu naprężeń termicznych można posłużyć się metodą stosowaną dla cylindra obciążonego ciśnieniem.

Równanie równowagi pozostaje niezmienione

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

związki geometryczne pozostają niezmienione

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad ; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

Zmianie ulegną związki fizyczne, które przyjmą postać:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\sigma_r - \nu\sigma_\theta\right) + \alpha T = \text{const.}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu\sigma_\theta - \nu\sigma_z\right) + \alpha T$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \nu\sigma_r - \nu\sigma_z\right) + \alpha T$$

gdzie:

T - wzrost temperatury, zależny od promienia r - $[T(r)]$

α - współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej

Rozwiązując ten układ równań ze względu na naprężenia otrzymujemy:

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - (1+\nu)\alpha T\right]$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_z - (1+\nu)\alpha T\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r + \nu\varepsilon_z - (1+\nu)\alpha T\right]$$

Podstawiając: $\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$ i $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r} + \nu\varepsilon_z - (1+\nu)\alpha T\right]$$

$$\underline{\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\frac{d^2u}{dr^2} + \nu\frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \nu\frac{u}{r^2} - (1+\nu)\alpha\frac{dT}{dr}\right]}$$

natomiast:

$$\underline{\frac{1}{r}\left(\sigma_r - \sigma_\theta\right)} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-2\nu)\varepsilon_r - (1-2\nu)\varepsilon_\theta\right]\frac{1}{r} =$$

$$= \frac{E}{(1+\nu)}\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)\cdot\frac{1}{r} = \underline{\frac{E}{(1+\nu)}\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right)}$$

Podstawiając do równania równowagi mamy:

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\frac{d^2u}{dr^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right) - (1+\nu)\alpha\frac{dT}{dr}\right] + \frac{E}{(1+\nu)}\left[\frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right] = 0$$

czyli:

$$(1-\nu)\frac{d^2u}{dr^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right) - (1+\nu)\alpha\frac{dT}{dr} + (1-2\nu)\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right) = 0$$

ostatecznie:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{dT}{dr}$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(u\cdot r)}{dr}\right] = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{dT}{dr}$$

$$u = \frac{1}{r}\frac{1+\nu}{1-\nu}\int_a^r \alpha T r\,dr + C\cdot r + \frac{D}{r}$$

warunki brzegowe:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r(a) &= 0 \\ \sigma_r(b) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}\frac{1}{b^2-a^2}\int_a^b \alpha T r\,dr - \nu\varepsilon_z \\ D &= \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{a^2}{b^2-a^2}\int_a^b \alpha T r\,dr \end{aligned}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu}\left[-\frac{1}{r^2}\int_a^r \alpha T r\,dr + \frac{r^2-a^2}{r^2(b^2-a^2)}\int_a^b \alpha T r\,dr\right]$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E}{1-\nu}\left[\frac{1}{r^2}\int_a^r \alpha T r\,dr + \frac{r^2+a^2}{r^2(b^2-a^2)}\int_a^b \alpha T r\,dr - \alpha T\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu}\left[\frac{2\nu}{b^2-a^2}\int_a^b \alpha T r\,dr + (1-\nu)\varepsilon_z - \alpha T\right]$$

W przytoczonych wzorach nieznana jest wartość odkszt. ε_z.
Jeżeli cylinder może się swobodnie wydłużać wówczas:

$$N = \iint_{(F)} \sigma_z\,dF = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\int_a^b \sigma_z\, r\,dr\,d\Theta = 0 \quad ; \quad 2\pi\int_a^b \sigma_z\, r\,dr = 0$$

$$\frac{b^2-a^2}{2}\cdot\frac{E}{1-\nu}\cdot\frac{2\nu}{b^2-a^2}\int_a^b \alpha T r\,dr + E\varepsilon_z\frac{b^2-a^2}{2} - \frac{E}{1-\nu}\int_a^b \alpha T r\,dr = 0$$

$$\frac{E\nu}{1-\nu}\int_a^b \alpha T r\,dr + E\varepsilon_z\frac{b^2-a^2}{2} - \frac{E}{1-\nu}\int_a^b \alpha T r\,dr = 0$$

$$-\int_a^b \alpha T r\,dr + \varepsilon_z \frac{b^2-a^2}{2} = 0 \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{2}{b^2-a^2}\int_a^b \alpha T r\,dr$$

czyli:

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu}\left(\frac{2}{b^2-a^2}\int_a^b \alpha T r\,dr - \alpha T\right)$$

Dla określenia rozkładu naprężeń w ściance należy przyjąć liniowy rozkład temperatury $T(r)$

$$T^* = T_1 - T_2 \quad ; \quad T(r) = T^* \frac{(b-r)}{(b-a)}$$

Z teorii przewodnictwa cieplnego należałoby raczej przyjąć logarytmiczny rozkład temperatury.

$$T(r) = \frac{T^*}{\ln\frac{b}{a}} \ln\frac{b}{r}$$

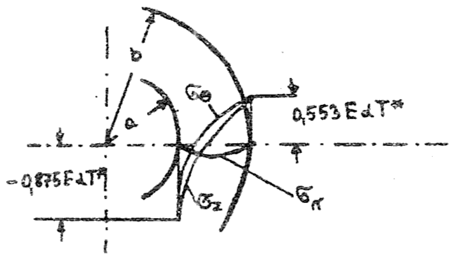
Po wykonaniu całkowania otrzymamy wówczas:

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha T^*}{2(1-\nu)\ln\frac{b}{a}}\left[\ln\frac{b}{r} + \frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\ln\frac{b}{a}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha T^*}{2(1-\nu)\ln\frac{b}{a}}\left[1-\ln\frac{b}{r} - \frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)\ln\frac{b}{a}\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T^*}{2(1-\nu)\ln\frac{b}{a}}\left[1-2\ln\frac{b}{r} - \frac{2a^2}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{a}\right]$$

Wykresy tych funkcji dla $\frac{a}{b} = 0{,}5$, $\nu = 0{,}3$



Przy równoczesnym działaniu ciśnienia można stosować zasadę superpozycji, tzn. sumować naprężenia od samego ciśnienia oraz od gradientu temperatury

Określić rozkład naprężeń w cylindrze grubościennym z dnami, obciążonym ciśnieniem wewnętrznym $p = 60$ MPa, przy różnicy temperatur powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej $T_1 - T_2 = 100°C$. Dane liczbowe: $b = 2a$; $a = 0{,}02$ m; $\nu = 0{,}3$, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa;

$$\alpha = 125 \cdot 10^{-7},\quad T(r) = \frac{T^*}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{r}$$

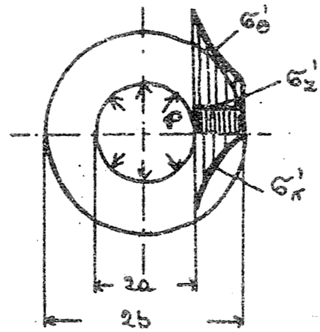
<u>od samego ciśnienia wewnętrznego</u>

$$\sigma'_r(a) = -p = -60 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma'_r(b) = 0$$

$$\sigma'_\theta(a) = \frac{p(a^2+b^2)}{(b^2-a^2)} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_\theta(b) = \frac{2pa^2}{(b^2-a^2)} = 40 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_z = \frac{a^2}{(b^2-a^2)} p = 20 \text{ MPa}$$



<u>od różnicy temperatur</u>

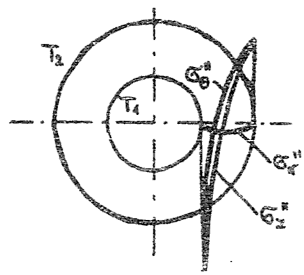
$$\sigma''_r(a) = 0 \quad ; \quad \sigma''_r(b) = 0$$

$$\sigma''_\theta(a) = -0{,}875\, E\alpha T^* = -220 \text{ MPa}$$

$$\sigma''_\theta(b) = 0{,}553\, E\alpha T^* = +140 \text{ MPa}$$

$$\sigma''_z(a) = -220 \text{ MPa}$$

$$\sigma''_z(b) = +140 \text{ MPa}$$



<u>całkowite naprężenie w ściance cylindra</u>

$$\sigma^c_r(a) = \sigma'_r(a) + \sigma''_r(a) = -60 \text{ MPa}$$

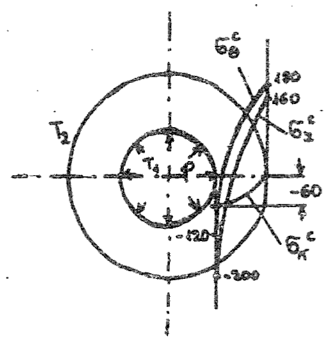
$$\sigma^c_r(b) = \sigma'_r(b) + \sigma''_r(b) = 0$$

$$\sigma^c_\theta(a) = \sigma'_\theta(a) + \sigma''_\theta(a) = -120 \text{ MPa}$$

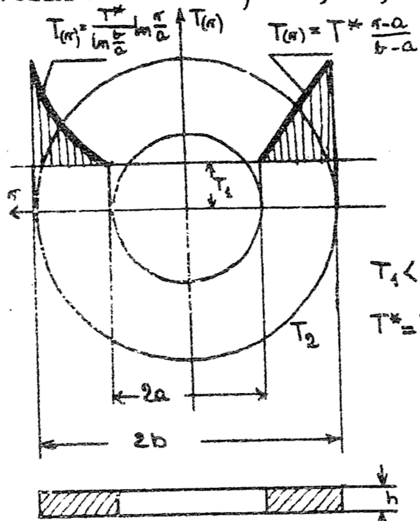
$$\sigma^c_\theta(b) = \sigma'_\theta(b) + \sigma''_\theta(b) = +180 \text{ MPa}$$

$$\sigma^c_z(a) = \sigma'_z(a) + \sigma''_z(a) = -200 \text{ MPa}$$

$$\sigma^c_z(b) = \sigma'_z(b) + \sigma''_z(b) = +160 \text{ MPa}$$



Wpływ gradientu temperatury na stan naprężenia w cienkich tarczach kołowo-symetrycznych



$T_1 < T_2$

$T^* = T_2 - T_1$

$h \ll b \Rightarrow \sigma_z = 0$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) + \alpha T$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) + \alpha T$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - (1+\nu)\alpha T\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - (1+\nu)\alpha T\right]$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad ; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r} - (1+\nu)\alpha T\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr} - (1+\nu)\alpha T\right]$$

Przy liniowym rozkładzie temperatury $T^* = T_2 - T_1$; $T = T^*\frac{r-a}{b-a}$.

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}\right] = \frac{1+\nu}{b-a}\alpha T^*$$

$$u = C_1 r \mp \frac{D_1}{r} + \frac{1+\nu}{3(b-a)}\alpha T^* r^2$$

Podstawiając (u) do (σ_r) i (σ_θ), oraz oznaczając:

$$\frac{E}{1-\nu}\left(C_1 + \frac{\alpha T^* a}{b-a}\right) = C \quad ; \quad \frac{E}{1+\nu}D_1 = D$$

otrzymujemy:

$$\sigma_r = C - \frac{D}{r^2} - \frac{T^*}{3(b-a)}\alpha E r$$

$$\sigma_\theta = C + \frac{D}{r^2} - \frac{2}{3}\frac{T^*}{b-a}\alpha E r$$

warunki brzegowe:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r(a) &= 0\\ \sigma_r(b) &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C &= \frac{T^*}{3(b^2-a^2)}\alpha E\,(a^2+ab+b^2)\\ D &= \frac{T^*}{3(b^2-a^2)}\alpha E\, a^2 b^2\end{aligned}$$

Przypadek tarczy wirującej z uwzględnieniem gradientu temperatury.

Stosujemy superpozycję naprężeń:

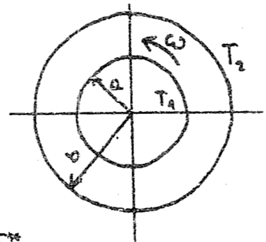
$$\sigma_r' = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 \quad ; \quad \sigma_\theta' = A - \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2$$

$$\sigma_r'' = C - \frac{D}{r^2} - \frac{T^*}{3(b-a)}\alpha E r \quad ; \quad \sigma_\theta'' = C + \frac{D}{r^2} - \frac{2}{3}\frac{T^*}{(b-a)}\alpha E r$$

$$\sigma_r^c = \sigma_r' + \sigma_r'' \qquad \sigma_\theta^c = \sigma_\theta' + \sigma_\theta''$$

$$A = \frac{E}{1-\nu} C_1$$

$$B = \frac{E}{1+\nu} C_2$$



$$\sigma_r^c = K + \frac{L}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\cdot\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 - \frac{T^*}{3(b-a)}\alpha E r$$

$$\sigma_\theta^c = K - \frac{L}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 - \frac{2}{3}\frac{T^*}{b-a}\alpha E r$$

gdzie : $K = A + C$; $L = D + B$ wyliczamy z warunków brzegowych:

$$\sigma_r(a) = 0 \quad ; \quad \sigma_r(b) = 0$$

Przypadek tarczy wirującej nierównomiernie nagrzanej i obciążonej na brzegach.

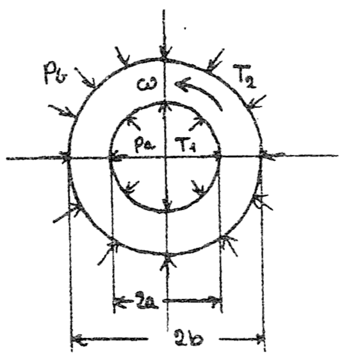
$$\sigma_r^c = \sigma_r(p_a ; p_b) + \sigma_r(\omega) + \sigma_r(T)$$

$$\sigma_\theta^c = \sigma_\theta(p_a ; p_b) + \sigma_\theta(\omega) + \sigma_\theta(T)$$

warunki brzegowe:

$$\sigma_r(a) = -p_a$$

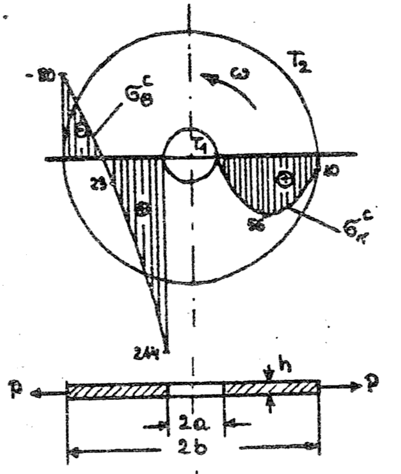
$$\sigma_r(b) = -p_b$$



Przykład:

Określić rozkład naprężeń w wirującej i nierównomiernie nagrzanej tarczy z otworem, obciążonej na zewnętrznym brzegu równomiernie rozłożonym obciążeniem $P = 0{,}1\ MN/m$. Dane: $a = 0{,}05\ m$; $b = 0{,}25\ m$; $h = 0{,}01\ m$; $n = 3000\ obr/min$; $T_1 = 200°C$; $T_2 = 300°C$; $E = 2\cdot 10^5\ MPa$; $\gamma = 7{,}85\cdot 10^{-2}\ MN/m^3$; $\alpha = 125\cdot 10^{-7}$; $\nu = 0{,}3$;

Przyjąć liniowy rozkład temperatury.



$$\sigma_r^c = K + \frac{L}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 - \frac{T^*}{3(b-a)}\alpha E r$$

$$\sigma_\theta^c = K - \frac{L}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 - \frac{2T^*}{3(b-a)}\alpha E r$$

w.b.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r(a)&=0\\ \sigma_r(b)&=\frac{P}{h}=10\ MPa\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}K&=139\ MPa\\ L&=-0{,}29\ MN\end{aligned}$$

dla $r = 3a$

$$\sigma_r^c = 139 - \frac{0{,}29}{9a^2} - 325\cdot 9a^2 - 416a = 56\ MPa$$

$$\sigma_\theta^c = 139 + \frac{0{,}29}{9a^2} - 187\cdot 9a^2 - 832a = 23\ MPa$$

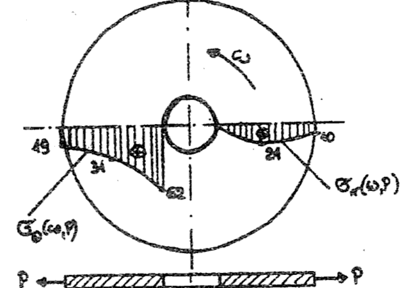
superpozycja:

$$\sigma_r^c = \sigma_r(\omega,P) + \sigma_r(T)$$

$$\sigma_\theta^c = \sigma_\theta(\omega,P) + \sigma_\theta(T)$$

$$\sigma_r(\omega,P) = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2$$

$$\sigma_\theta(\omega,P) = A - \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2$$

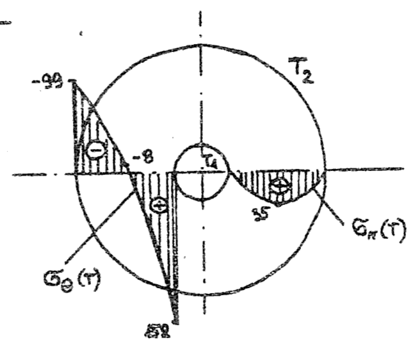


w.b.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r(a)&=0\\ \sigma_r(b)&=\frac{P}{h}=10\ MPa\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}A&=31{,}6\ MPa\\ B&=-7{,}68\cdot 10^{-2}\ MN\end{aligned}$$

$$\sigma_r(T) = C - \frac{D}{r^2} - \frac{T^*}{3(b-a)}\alpha E r$$

$$\sigma_\theta(T) = C + \frac{D}{r^2} - \frac{2T^*}{3(b-a)}\alpha E r$$



w.b.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r(a)&=0\\ \sigma_r(b)&=0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}C&=107{,}63\ MPa\\ D&=0{,}22\ MN\end{aligned}$$